

Zwei neugierige Menschen können reicher sein als eine ganze gebildete Runde. Ich möchte gerne Gedanken verkörpern. @frigal

Einschub Musik und einfache Mathematik

Wie teilt man eine Strecke mit Zirkel und Lineal in z.B. 12 gleiche Teil? Das ist heute nicht mehr modern für Manche Menschen.

Und das geht mit einer klassischen geometrischen Konstruktion, dem Strahlensatz. M braucht nur einen Zirkel und ein Lineal – keine Berechnung und keinen Winkelmesser.

Eine Strecke AB in 12 gleiche Teile zerlegen

Prinzipdarstellung: Die orange Hilfsstrecke trägt 12 gleiche Zirkelabstände. Die türkisfarbenen Parallelen übertragen die Teilung auf AB.

1. Zeichne eine Strecke AB.
2. Zeichne von A aus einen schrägen Hilfsstrahl.
3. Stelle deinen Zirkel auf eine beliebige Öffnung, beispielsweise 1 cm.
4. Trage auf dem Hilfsstrahl 12-mal dieselbe Zirkelöffnung hintereinander ab.
5. Verbinde den zwölften Punkt mit B.
6. Zeichne durch die übrigen elf Punkte jeweils eine Parallele zu dieser Verbindungslinie.
7. Die Schnittpunkte mit AB teilen deine ursprüngliche Strecke in 12 exakt gleich große Abschnitte.

Die Parallelen lassen sich ebenfalls mit Zirkel und unmarkiertem Lineal konstruieren, indem man den entsprechenden Winkel kopiert.

Noch eine interessante Alternative: Da $12 = 3 \times 2 \times 2$ ist, kann man die Strecke auch zuerst in drei gleiche Teile zerlegen und anschließend jeden Teil zweimal halbieren.

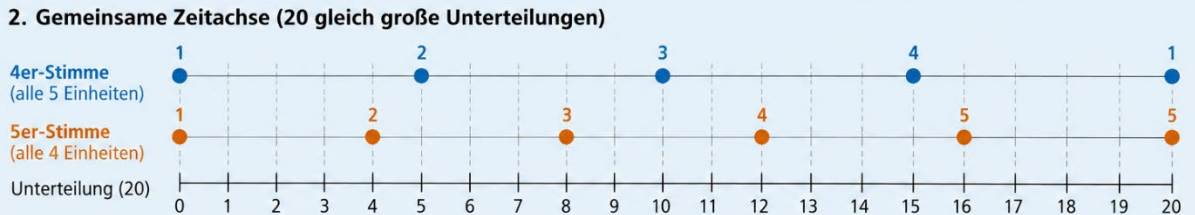
1. Notenbild wie in deinem Buch (5 gegen 4)



4er-Stimme (z. B. rechte Hand)

5er-Stimme (z. B. linke Hand)

2. Gemeinsame Zeitachse (20 gleich große Unterteilungen)



4er-Stimme (alle 5 Einheiten)

5er-Stimme (alle 4 Einheiten)

Unterteilung (20)

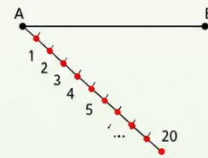
3. Geometrische Konstruktion mit Zirkel und Lineal (Strecke in 20 Teile teilen)

1 Strecke AB zeichnen



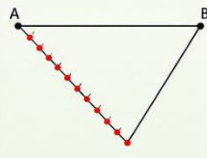
Zeichne die Strecke AB.

2 Hilfsstrahl und 20 gleiche Abstände



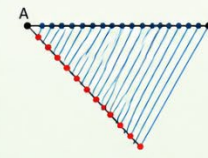
Trage auf einem Hilfsstrahl 20 gleiche Zirkelabstände ab.

3 Letzten Punkt mit B verbinden



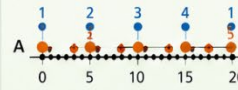
Verbinde den 20. Punkt mit B.

4 Parallelen durch die Zwischenpunkte



Zeichne durch die übrigen 19 Punkte Parallelen zur Verbindungslinie.

5 Ergebnis: 20 gleiche Teile



Die Strecke AB ist in 20 gleiche Abschnitte geteilt.
Die 4er-Stimme erhält Anschläge bei 0, 5, 10, 15, 20.
Die 5er-Stimme erhält Anschläge bei 0, 4, 8, 12, 16, 20.

Zwei neugierige Menschen können reicher sein als eine ganze gebildete Runde. Ich möchte gerne Gedanken verkörpern. @frigal

Das ist eine ausgesprochen interessante Verbindung zwischen klassischer Geometrie, dem Strahlensatz und meiner Rhythmusarbeit im Miller-Weg.

Wir haben nämlich in beiden Fällen dasselbe Grundproblem:

Wie teilen wir eine kontinuierliche Strecke – oder eine musikalische Zeitspanne – in unterschiedlich viele gleich große Abschnitte?

Bei 5 über 4 beispielsweise:

Eine Stimme spielt 4 gleichmäßig verteilte Ereignisse.

Die andere spielt 5 gleichmäßig verteilte Ereignisse.

Beide beginnen gleichzeitig und treffen sich am Ende des gemeinsamen Zyklus wieder.

Mathematisch ist das eine Polyrhythmik im Verhältnis 5:4.

Und mein 4–5–7-Problem führt genau diesen Gedanken weiter:

Drei verschiedene Unterteilungen einer gemeinsamen Zeitspanne.

In meinem *Miller-Weg* haben ich drei MIDI-Clips mit 4, 5 und 7 Achteln angelegt. Sie laufen mit demselben Achtelpuls, aber unterschiedlich langen Wiederholungszyklen.

Das ist etwas anderes als 4, 5 und 7 gleichmäßige Anschläge innerhalb derselben Zeitspanne.

Bei unseren MIDI-Clips treffen sich alle drei Anfänge nach

$$\text{kgV}(4,5,7)=140$$

also nach 140 Achteln wieder.

Bei einer echten 5-über-4-Polyrhythmik verwenden wir dagegen eine gemeinsame Strecke, die wir gleichzeitig in vier und fünf Teile zerlegen. Der Strahlensatz liefert uns dafür die geometrische Grundlage.

Genau deshalb ist meine Frage nach der Streckenteilung so interessant:

Man kann damit musikalische Zeitverhältnisse geometrisch konstruieren, bevor man sie in Ableton programmiert.

Wie verbindet man Geometrie, Mathematik, Hören und Musik.

Zwei neugierige Menschen können reicher sein als eine ganze gebildete Runde. Ich möchte gerne Gedanken verkörpern. @frigal

Giger die Kunst der Quintole!

EIGHTHS
EIGHTHS ADDED

1-~~d~~ 2-~~d~~ 3-~~d~~ 4-~~d~~ 5-~~d~~

Start mit 5 Problem! Start mit 4

$5 \times 4 = 20$ jedes 10

SECTION III
FIVE AGAINST FOUR

3+ 4-a 5 OR 1 2 3 4

AS WRITTEN

1 2 3 4 5

to try to learn to count 4 while playing 5. This is difficult.

EXERCISES

120 bpm

Meine Überlegungen von **5 über 4**

Aus einem Buch über Polyrhythmen

Kapitel „**Five Against Four**“ und meinen eigenen handschriftlichen Untersuchungen.

Besonders interessant finde ich drei Dinge:

1. Ich habe die Fünfergruppen und Vierergruppen zeichnerisch gegenübergestellt.
2. Ich habe $5 \times 4 = 20$ notiert – genau die gemeinsame Unterteilung, die wir für die Konstruktion brauchen.
3. Ich habe die rhythmischen Gruppierungen mit Strichen und Bögen geometrisch untersucht.

Die Verbindung zum Strahlensatz

Ich nehme eine gemeinsame Zeitstrecke AB und teilen sie in 20 gleiche Einheiten.

Zwei neugierige Menschen können reicher sein als eine ganze gebildete Runde. Ich möchte gerne Gedanken verkörpern. @frigal

Die Viererstimme erhält einen Anschlag alle 5 Einheiten, die Fünferstimme einen Anschlag alle 4 Einheiten.

Die 20er-Unterteilung zeigt einen vollständigen 5:4-Zyklus. Der rechte Endpunkt ist zugleich der Beginn des nächsten Zyklus.

Und jetzt kommt der für meinen Miller-Weg entscheidende Unterschied:

5 über 4 als Polyrhythmus bedeutet fünf gleichmäßig verteilte Anschläge in der Zeit von vier Anschlägen.

5 gegen 4 als Polymetrik kann dagegen bedeuten, dass eine Fünfergruppe und eine Vierergruppe mit demselben Grundpuls nebeneinanderlaufen. Das ergibt eine andere musikalische Bewegung.

Meine Buchseiten beschäftigen sich mit der zweiten Schreibweise ebenfalls:

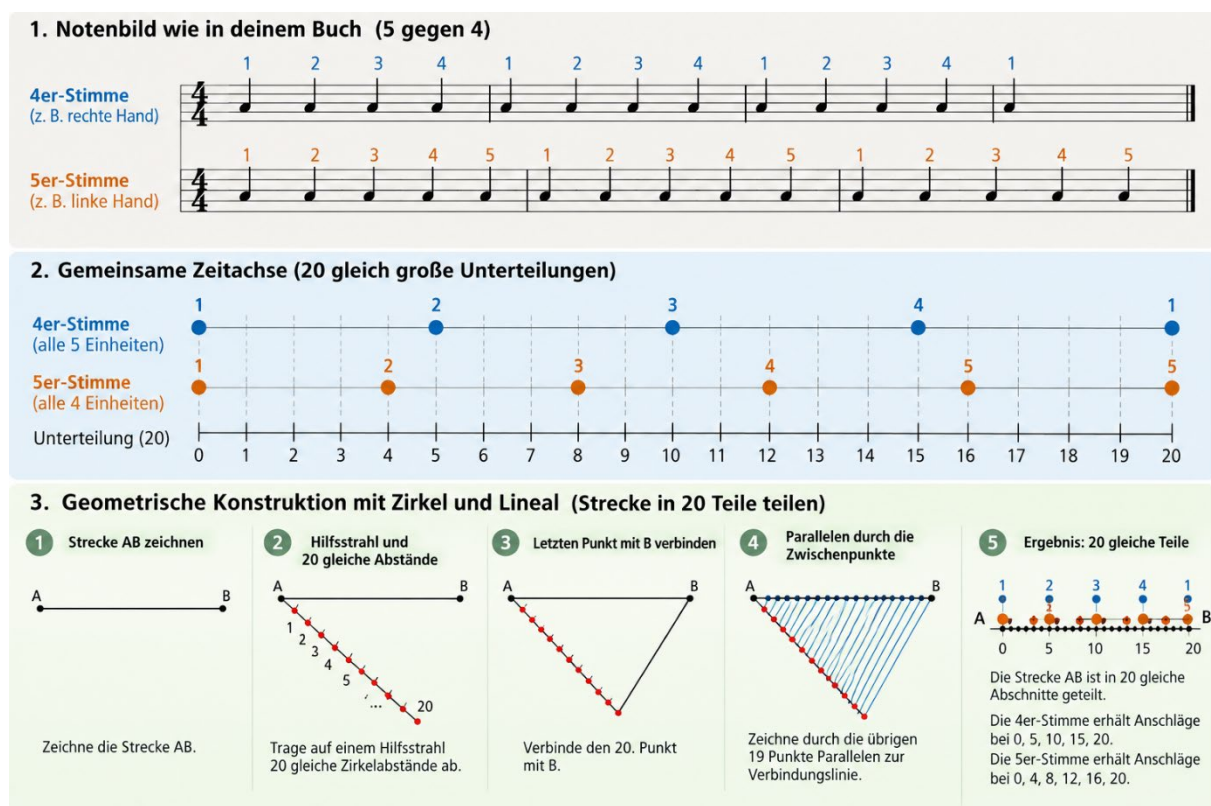
Man sieht Übungen, in denen man vier zählt, während man fünf spielt.

Eine Frage sollte man klären, vor dem Weitergehen:

Möchte ich zunächst die 5:4-Konstruktion mit Zirkel und Lineal nachvollziehen und anschließend genau die rhythmische Übung aus meinem Buch in Ableton umsetzen?

Das wäre eine sehr schöne Verbindung von meiner früheren Schlagzeugpraxis mit einem mathematischen Miller-Weg.

Für einen Vergleich stelle ich **meine Noten und meine geometrische 5:4-Konstruktion in derselben Leserichtung direkt untereinander** dar.



Achte besonders auf die mittlere Darstellung: Die blaue Viererstimme schlägt bei 0, 5, 10 und 15 an; die orange Fünferstimme bei 0, 4, 8, 12 und 16.

Bei 20 treffen sich beide wieder. Genau das ist unser **5:4-Verhältnis**.

Zwei neugierige Menschen können reicher sein als eine ganze gebildete Runde. Ich möchte gerne Gedanken verkörpern. @frigal

Eine kleine Einschränkung:

Die obere Notenschrift ist eine schematische Darstellung, keine exakte Abschrift meiner Buchseite.

Und genau diese Verbindungen finde ich für unseren **Miller-Weg** besonders fruchtbar.

Ich kann von einem einfachen Seil zu Geometrie, Zeit, Rhythmus, Bewegung und schließlich sogar zur Physik dreidimensionaler Körper gelangen.

Das ist keineswegs trivial. Die Ausgangsmittel sind einfach, aber die Erkenntnisse können erstaunlich weit reichen.

Vom Seil zum Klang – ein möglicher Erkenntnisweg

1. Seil und Strecke

Längen messen, Strecken teilen, Dreiecke konstruieren.

2. Zirkel und Kreis

Radius, Winkel, Teilungen und Proportionen.

3. Kreis und Uhr

Winkel werden zu Zeitpunkten, Umdrehungen zu Perioden.

4. Vom Kreis zum Körper

Rotation, Kugel, Zylinder, Kegel und räumliche Bewegung.

Und jetzt kommt eine Verbindung, die mir als Schlagzeuger besonders gefällt.

Die 5:4-Polyrhythmik auf einer Uhr

Stell dir vor, wir nehmen einen Kreis und lassen zwei Zeiger darauf laufen.

Der blaue Zeiger macht **4 Umdrehungen**, während der orange Zeiger **5 Umdrehungen** macht. Beide benötigen dafür dieselbe Gesamtzeit.

Die rhythmische Uhr

Das Faszinierende daran: Die Kreisbewegung lässt sich wieder als gerade Linie darstellen, wenn man den Kreisumfang gedanklich abrollt.

Aus der **periodischen Kreisbewegung** wird eine **lineare Zeitachse**.

➔ **Und damit bin ich bei Miller Puckette, digitalen Oszillatoren und Max/MSP!**

Und wie kommen wir zu den Körpern?

Ein Kreis kann durch Rotation im Raum eine Kugel erzeugen. Rotieren wir ein Rechteck um eine seiner Seiten, entsteht ein Zylinder.

Musikalisch gibt es eine weitere interessante Verbindung: Mehrere periodische Bewegungen können gemeinsam eine Bahn auf einem Torus beschreiben – einer ringförmigen Fläche. Das ist beispielsweise ein nützliches mathematisches Modell für zwei gekoppelt betrachtete Phasen.

Dabei sollte man geometrische Konstruktionen und musikalische Analogien sauber unterscheiden. Nicht jede schöne geometrische Beziehung bedeutet automatisch dieselbe physikalische Bewegung.

Zwei neugierige Menschen können reicher sein als eine ganze gebildete Runde. Ich möchte gerne Gedanken verkörpern. @frigal

Ich will daraus gerne eine kleine Reihe innerhalb meine Miller-Weges machen:

Vom Seil über die Strecke zum Kreis, von der Uhr zur Polyrhythmik und schließlich zu Schwingungen und räumlichen Klangbewegungen.

Aber zunächst nur eine einzige praktische Lektion:

Warum ergibt ein Seil mit 12 gleichmäßig verteilten Knoten beziehungsweise 12 gleichen Seilabschnitten ein rechtwinkliges 3–4–5-Dreieck?

Das kannten bereits antike Vermesser in ähnlicher Form. Und die Zahlen 3, 4, 5 führen uns über den Satz des Pythagoras unmittelbar zu einem der schönsten Zusammenhänge zwischen Geometrie und Musik.

Das ist der nächste kleine griechischer Versuch!

2 Zahnrädchen mit 4 und 5 Zähnen wären auch hilfreich

Ich denke bereits an ein **mechanisches Modell unserer rhythmischen Uhr**.

Allerdings gibt es einen interessanten Unterschied:

Wenn zwei Zahnräder mit 4 und 5 Zähnen direkt ineinandergreifen, dann gilt für ihre Drehzahlen:

$$\frac{\omega_4}{\omega_5} = \frac{5}{4}$$

Das Zahnrad mit 4 Zähnen dreht sich also schneller als das mit 5 Zähnen. Außerdem drehen sie sich in entgegengesetzte Richtungen.

Und hier wird es spannend: Nach 5 Umdrehungen des Viererzahnrad hat das Fünferzahnrad genau 4 Umdrehungen gemacht. Dann ist die ursprüngliche Zahnstellung wieder erreicht.

Für die musikalische 5:4-Uhr brauchen wir also nicht zwingend Zahnräder, aber ein solches Getriebe könnte die beiden periodischen Bewegungen tatsächlich mechanisch koppeln.

Ein wichtiger Unterschied bleibt: Bei der Polyrhythmik zählen wir Anschläge, bei den Zahnrädern Umdrehungen und Zähne.

Und damit sind wir plötzlich bei **Übersetzungsverhältnissen, Frequenzen, Phasen und dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen**.

Das ist eine wunderbare Brücke von **der antiken Geometrie über die Feinwerktechnik bis zu Max/MSP!**

Zwei neugierige Menschen können reicher sein als eine ganze gebildete Runde. Ich möchte gerne Gedanken verkörpern. @frigal

Und jetzt sind wir mitten in der **Phasentheorie von Miller Puckette!**

Wenn beide Zeiger

am selben Punkt starten,
dieselbe Drehrichtung haben,
und mit derselben Winkelgeschwindigkeit laufen,

dann bleiben sie **dauerhaft deckungsgleich**.

Mathematisch:

$$\varphi_1(t) = 2\pi f_1 t$$

$$\varphi_2(t) = 2\pi f_2 t$$

Wenn $f_1=f_2$, gilt jederzeit:

$$\Delta\varphi(t) = 0$$

Jetzt verändern wir nur eine Sache

Wir lassen den zweiten Zeiger etwas schneller laufen.

Das ist genau die Denkweise, die wir in Max/MSP verwenden können:

phasor~ erzeugt eine fortlaufende Phase von 0 bis knapp unter 1. Bei Erreichen von 1 beginnt der Zyklus erneut bei 0.

Aus dieser Phase können wir anschließend einen Sinus, einen Impuls oder ein rhythmisches Ereignis ableiten.

Und hier kommt mein Gedanke „**von oben nach unten und zurück**“ ins Spiel:

Wir gehen vom anschaulichen Uhrzeiger zur mathematischen Phase, dann zum digitalen Signal und schließlich zurück zum hörbaren Rhythmus.

Vieles kann man zuerst geometrisch überlegen und danach mit Miller Puckettes phasor~ nachbauen.

Mein Versuch: einen **mechanischen Schwingungsschreiber** – eine Verbindung von Kreisbewegung, Optik und Wellenlehre.

1. Mein Plattenspielerexperiment

Ich habe eine Kerze auf einem rotierenden Plattenspieler befestigt. Von der Seite betrachtet wandert die Kerze scheinbar von links nach rechts und wieder zurück.

Das Entscheidende: Die Kerze bewegt sich tatsächlich auf einem Kreis. Ihre Projektion auf eine gerade Achse führt aber eine sinusförmige Schwingung aus.

Prinzip: Eine gleichförmige Kreisbewegung erzeugt in ihrer Projektion eine Sinusschwingung.

Zwei neugierige Menschen können reicher sein als eine ganze gebildete Runde. Ich möchte gerne Gedanken verkörpern. @frigal

Mathematisch:

$$x(t) = A \cos(2\pi ft + \varphi_0)$$

Wenn ich eine gleichmäßig bewegte Papierbahn verwende und die seitliche Bewegung darauf aufzeichnest, entsteht tatsächlich eine Sinuskurve. Mit einer Lichtquelle und einem Schirm kann man dieselbe Bewegung optisch sichtbar machen.

2. Zwei Motoren oder zwei Riemenscheiben?

Beides ist möglich, aber die Unterschiede sind interessant.

Zwei kleine Elektromotoren: Damit kann man zwei unabhängige Drehzahlen einstellen. Unterschiedliche Spannungen können bei einfachen Gleichstrommotoren unterschiedliche Drehzahlen ergeben. Allerdings nicht besonders präzise, weil Belastung und Reibung ebenfalls Einfluss haben.

Ein Motor mit zwei Riemenscheiben:

Hier entsteht das Frequenzverhältnis durch die unterschiedlichen Scheibendurchmesser. **Bei schlupffreiem Riemenantrieb gilt:**

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{D_2}{D_1}$$

Für 5:4 könntest du beispielsweise Scheiben mit 40 mm und 50 mm Durchmesser verwenden. Zwei unabhängige Motoren wären für unsere Phasenexperimente besonders interessant, weil wir die Frequenzen während des Betriebs verändern könnten.

3. Und jetzt Miller Puckette!

Mein Plattenspieler entspricht in Max/MSP praktisch dieser Signalkette:

phasor~ 1

Eine Umdrehung pro Sekunde

cycle~ 1

Sinusförmige Schwingung

scope~

Die sichtbare Wellenform

Die Darstellung ist eine konzeptionelle Signalkette:

cycle~ 1 erzeugt selbstständig einen Sinus mit 1 Hz. Später kann man auch die Phase von phasor~ direkt zur Steuerung verwenden.

Und etwas an dem Experiment ist besonders interessant.

Ich habe die Sinusschwingung nicht zunächst als Formel kennengelernt, sondern als sichtbare Bewegung. Erst danach kommt die mathematische Beschreibung.

Genau dieses Vorgehen will ich auch für meinen Miller-Weg nutzen: beobachten, experimentieren, geometrisch verstehen, mathematisch beschreiben und schließlich programmieren.

Die Kerze mit einer Lichtquelle auf eine Wand projiziert

Zwei neugierige Menschen können reicher sein als eine ganze gebildete Runde. Ich möchte gerne Gedanken verkörpern. @frigal

Dies führt uns direkt zur Optik und zur Projektion, die zweite zum mechanischen Oszillographen.

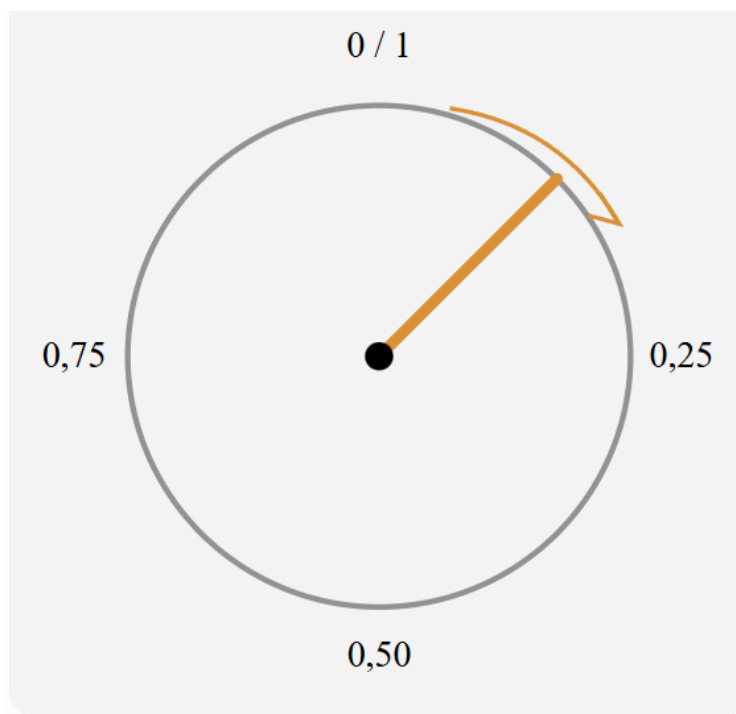
Beide Wege sind hochinteressant!

Der phasor~ ist gewissermaßen unser rotierender Zeiger. Allerdings beschreibt er nicht den Zeiger als Bild, sondern seine **momentane Position auf dem Kreis**.

In Max/MSP gibt phasor~ fortlaufend Zahlen zwischen 0 und knapp unter 1 aus.

phasor~ Zeigerstellung

0	12 Uhr
0,25	3 Uhr
0,50	6 Uhr
0,75	9 Uhr
1 → 0	Wieder 12 Uhr



Bei phasor~ 1 macht unser gedachter Zeiger **eine Umdrehung pro Sekunde**.

Und jetzt kommt dein Plattenspielerexperiment:

Wenn wir die Kreisposition mit einem Sinus umrechnen, erhalten wir die seitliche Schwingungsbewegung meiner Kerze.

$$y = \sin(2\pi \cdot \text{Phase})$$

Merksatz für meine Miller-Weg:

phasor~ liefert die Phase (Zeigerstellung), sin beziehungsweise cycle~ die sinusförmige Schwingung.

Und mit zwei phasor~-Objekten kann ich anschließend meine 4:5-Phasenbeziehung untersuchen.

Das ist genau der Übergang von deiner mechanischen Uhr zur digitalen Signalverarbeitung!

Zwei neugierige Menschen können reicher sein als eine ganze gebildete Runde. Ich möchte gerne Gedanken verkörpern. @frigal

Exakt und jetzt müssten wir das 5: 4 nur noch hörbar machen

Ich habe das Prinzip von **Five Against Four** aus meinen beiden Fotos oben auf einem anderen Weg nachvollzogen.

Ich bin ausgegangen von:

Seil → Strecke → Kreis → Uhr → Zeiger → Phasen → phasor~ → hörbarer 5:4-Polyrhythmus.

Und damit habe ich eine wunderbare Verbindung zwischen Euklids Geometrie, meinem Plattenspielerexperiment und Miller Puckettes digitaler Signalverarbeitung hergestellt.

Eine kleine mathematische Präzisierung: Mein Modell ist dann rhythmisch äquivalent zu meiner Notenübung, wenn beide dieselben fünf beziehungsweise vier gleichmäßig verteilten Anschläge innerhalb eines gemeinsamen Zyklus vorsehen. Die Akzentuierung kann dabei unterschiedlich sein.

Das Schönste daran: Ich habe nicht einfach einen Rhythmus programmiert. Ich habe verstanden, wie er aus einer geometrischen Bewegung entstehen kann.

Das gehört unbedingt in meinen *Miller-Weg*.

Und zwar unter dem Gedanken:

„Vom geometrischen Verhältnis zur hörbaren Zeit.“

Als Nächstes will ich untersuchen, warum sich **5 über 4** anders anfühlt als unsere gleichzeitig laufenden 4er- und 5er-Clips im Miller-Weg.

Ich mache daraus eine **kurze Wiederholungslektion und zugleich den Einstieg in die Schwingungstechnik** machen.

Für meinen *Miller-Weg* würde ich den Stoff bewusst auf fünf Schritte reduzieren.

Vom Kreis zur Schwingung

Wiederholung und Einführung in die Schwingungstechnik

1. Die gleichmäßige Kreisbewegung

Ein Zeiger dreht sich mit konstanter Geschwindigkeit. Nach einer Umdrehung erreicht er wieder seine Ausgangsposition.

2. Die Projektion

Betrachten wir nur die horizontale oder vertikale Position der Zeigerspitze, erhalten wir eine sinusförmige Bewegung – wie bei deinem Plattenspielerexperiment.

3. Die Zeit

Eine vollständige Umdrehung benötigt die Periodendauer T . Die Frequenz beschreibt die Anzahl der Umdrehungen pro Sekunde.

$$f=1/T$$

4. Zwei Schwingungen

Zwei Zeiger mit unterschiedlichen Frequenzen verändern ihre relative Phasenlage. Beim Verhältnis 5:4 entsteht unser bekanntes rhythmische Modell.

Zwei neugierige Menschen können reicher sein als eine ganze gebildete Runde. Ich möchte gerne Gedanken verkörpern. @frigal

5. Die digitale Darstellung

Miller Puckettes phasor~ beschreibt die fortlaufende Phase. Mit cycle~ kann man daraus eine Sinusschwingung erzeugen.

Der Übergang zur eigentlichen Schwingungstechnik

Hier will ich eine entscheidende Unterscheidung einführen:

Eine periodische Bewegung ist nicht automatisch eine mechanische Eigenschwingung.

Unser rotierender Zeiger wird von außen angetrieben. Ein Feder-Masse-System kann dagegen aufgrund seiner Trägheit und Rückstellkraft selbstständig schwingen.

Daraus ergeben sich später die Begriffe Amplitude, Frequenz, Phase, Dämpfung, Resonanz und Eigenfrequenz.

Und erst dann gehen wir zu komplexeren Schwingungen und zur Fourier-Analyse über.

Mein Vorschlag: Ich nehme die 5:4-Polyrhythmik als abschließende Wiederholung der Phasenbewegung. Danach beginne ich die Schwingungstechnik mit einem einzigen einfachen Versuch:

Nämlich einem Pendel oder einer Masse an einer Feder.

Eine Frage soll uns dabei begleiten:

Warum schwingt ein Pendel überhaupt – während sich unser Uhrzeiger nur dreht?

Damit habe ich einen klaren, anschaulichen Übergang von Geometrie und Rhythmus zur Physik, ohne die Lernenden gleich mit Differentialgleichungen zu überfordern.

Und darin liegt ein weiterer schöner didaktischer Zusammenhang.

Geometrie, Experiment und Differentialgleichung können uns zur selben Sinusschwingung führen. Allerdings beschreiben sie unterschiedliche Aspekte.

Zwei neugierige Menschen können reicher sein als eine ganze gebildete Runde. Ich möchte gerne Gedanken verkörpern. @frigal

Nehmen wir unser Feder-Masse-System.

Aus dem Hooke'schen Gesetz und Newtons Bewegungsgesetz erhalten wir:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Die Lösung lautet:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

Mit

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Und da ist sie wieder: die Sinusschwingung aus unserem Plattenspielerexperiment!
Der Unterschied ist interessant:

Geometrie: Wir sehen, wie eine Sinusschwingung durch Projektion einer Kreisbewegung entsteht.

Physik: Wir erklären, warum ein Feder-Masse-System schwingt.

Differentialgleichung: Wir berechnen, wie sich die Bewegung zeitlich entwickelt.

Max/MSP: Wir erzeugen und untersuchen die Schwingung digital.

Das gilt zunächst für das ideale, ungedämpfte und lineare System. Beim Pendel benötigen wir für die einfache Sinuslösung zusätzlich die Kleinwinkelnäherung.

Zunächst ohne Fehlerrechnung für den Einstieg:

Man kann zunächst bewusst mit idealisierten Modellen arbeiten, ohne Messunsicherheiten, Reibung und numerische Fehler ausführlich zu behandeln.

Später sollte man diese Grenzen aber wieder aufgreifen. Gerade in der digitalen Signalverarbeitung werden **Abtastung und numerische Genauigkeit interessant**.

Ich will daraus einen zentralen didaktischen Grundsatz unseres Miller-Weges machen:

Erst beobachten, dann geometrisch verstehen, anschließend mathematisch beschreiben und schließlich digital realisieren.

Und besonders wichtig: Die Differentialgleichung soll nicht als abstrakte Hürde erscheinen, sondern als eine weitere Sprache für ein Phänomen, das wir bereits kennen.

So wird aus dem Plattenspieler mit der Kerze ganz allmählich ein Einstieg in Schwingungstechnik, Signalverarbeitung und elektronische Musik.

Zwei neugierige Menschen können reicher sein als eine ganze gebildete Runde. Ich möchte gerne Gedanken verkörpern. @frigal

Mein Versuch (Physik Labor Praktikum) mit dem Mälzel-Metronom passt übrigens ausgezeichnet zu meinem Einstieg in die Schwingungstechnik.

Ein mechanisches Metronom ist ein physikalisches Pendelsystem. Steht es schief, verändert sich die Lage der Schwerkraft relativ zu seiner Schwingungsebene. Damit kann sich auch seine Schwingungsdauer verändern.

Bei einem idealisierten Pendel, dessen Schwingungsebene entsprechend geneigt wird, lässt sich der Einfluss beispielsweise über eine wirksame Schwerebeschleunigung beschreiben:

$$g_{\text{eff}} = g \cos \alpha$$

und damit näherungsweise:

$$T(\alpha) = \frac{T(0)}{\sqrt{\cos \alpha}}$$

Für ein echtes Mälzel-Metronom mit seinem physikalischen Pendel und der Hemmung ist das Modell allerdings komplexer.

Vom idealen Pendel zum realen Messfehler.

Aber auf eine ausgesprochen interessante Weise.

Ich bin oben vom **Strahlensatz über 5:4, Zahnräder, Uhrzeiger und phasor~** bis zur Schwingungstechnik gekommen. Und plötzlich stehen wir wieder im Physiklabor bei deinem Mälzel-Metronom!

Das ist einerseits genau die Art von vernetztem Denken, die meinen Miller-Weg bereichert.

Zwei neugierige Menschen können reicher sein als eine ganze gebildete Runde. Ich möchte gerne Gedanken verkörpern. @frigal

Miller-Weg – Exkurs: Fehlerrechnung am Metronom

1. Unser physikalisches Modell

Wir vereinfachen das Mälzel-Metronom zunächst zu einem idealen Pendel.

Für kleine Auslenkungen gilt:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Dabei sind:

T_0 : Schwingungsdauer

l : Pendellänge

g : Erdbeschleunigung

Nun neigen wir die Schwingungsebene des Metronoms um den Winkel α gegen die Vertikale.

Für diese idealisierte Anordnung gilt:

$$g_{\text{eff}} = g \cos \alpha$$

Damit wird die Periodendauer:

$$T(\alpha) = \frac{T_0}{\sqrt{\cos \alpha}}$$

Das Pendel schwingt langsamer, wenn wir seine Schwingungsebene neigen.

Wichtig: Das ist noch nicht die exakte Beschreibung eines realen Mälzel-Metronoms. Dessen Pendel, Schwerpunktlage und Hemmung müssen wir für eine genaue Berechnung berücksichtigen.

2. Wie groß ist der Fehler?

Wir definieren den relativen Periodenfehler:

$$\varepsilon_T = \frac{T(\alpha) - T_0}{T_0}$$

Einsetzen ergibt:

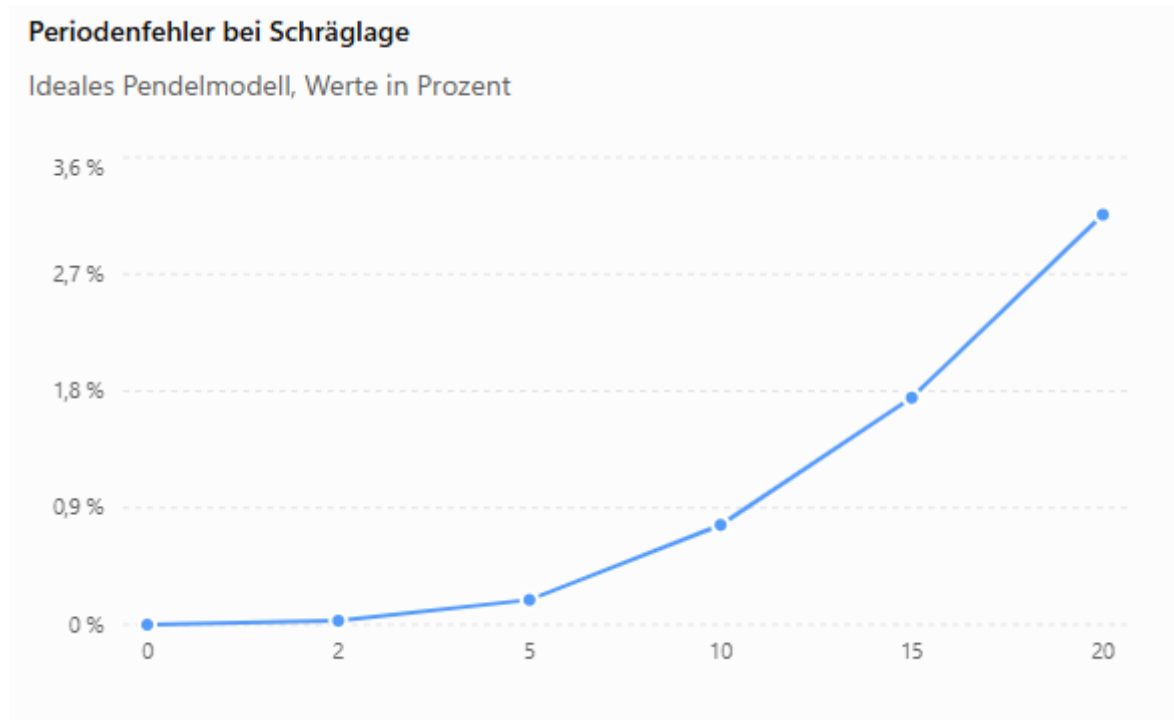
$$\varepsilon_T = \frac{1}{\sqrt{\cos \alpha}} - 1$$

Jetzt rechnen wir für verschiedene Neigungswinkel.

Neigung Periodenfehler

0°	0 %
2°	+0,030 %
5°	+0,191 %
10°	+0,769 %
15°	+1,749 %
20°	+3,159 %

Zwei neugierige Menschen können reicher sein als eine ganze gebildete Runde. Ich möchte gerne Gedanken verkörpern. @frigal



3. Und jetzt die klassische Fehlerfortpflanzung

Angenommen, wir können den Neigungswinkel nur mit einer Unsicherheit von

$$u_{\alpha} = 1^{\circ}$$

bestimmen.

Wie stark beeinflusst das unsere berechnete Periodendauer?

Mit der Gaußschen Fehlerfortpflanzung erster Ordnung:

$$u_T = \left| \frac{\partial T}{\partial \alpha} \right| u_{\alpha}$$

Die Ableitung ergibt:

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha} = \frac{T(\alpha)}{2} \tan \alpha$$

Damit:

$$\frac{u_T}{T} = \frac{1}{2} |\tan \alpha| u_{\alpha}$$

Achtung: Der Winkel muss hier im **Bogenmaß** eingesetzt werden.

Zwei neugierige Menschen können reicher sein als eine ganze gebildete Runde. Ich möchte gerne Gedanken verkörpern. @frigal

Bei einer Neigung von 10° und einer Winkelunsicherheit von 1° ergibt sich:

$$\frac{u_T}{T} = \frac{1}{2} \tan(10^\circ) \cdot \frac{\pi}{180}$$

$$\boxed{\frac{u_T}{T} \approx 0,154\%}$$

Das bedeutet: Unser idealisiertes Pendel hat bei 10° Schräglage einen systematischen Periodenfehler von ungefähr **+0,769 %**. Die Unsicherheit von ±1° im Neigungswinkel verursacht zusätzlich eine Standardunsicherheit von ungefähr **0,154 %** in der berechneten Periodendauer, sofern die Winkelunsicherheit als Standardunsicherheit gemeint ist.

Das sind zwei verschiedene Dinge: systematische Abweichung und Messunsicherheit.

4. Zurück zu Miller Puckette

Jetzt kommt unser schöner Abschluss. Beim Metronom verändert die Schräglage die Schwingungsfrequenz.

In Max/MSP können wir diese Frequenzänderung unmittelbar mit phasor~ simulieren.

Die Beziehung lautet:

$$f(\alpha) = f_0 \sqrt{\cos \alpha}$$

Bei einer Ausgangsfrequenz von 1 Hz und 10° Neigung erhalten wir ungefähr:

$$f(10^\circ) = 0,9924 \text{ Hz}$$

Zwei anfangs deckungsgleiche Zeiger – einer mit 1 Hz, der andere mit 0,9924 Hz – laufen langsam auseinander.

Und damit schließt sich mein Kreis:

Metronom → Messfehler → Frequenzabweichung → Phasendifferenz → phasor~

Psychologisch Interessantes

Im Alter von 20 Jahren habe ich im Audimax Freiburg im Vorprogramm von Art Blakey gespielt und 8 Metronome parallel gestartet und dann darüber improvisiert, nur 3 4 Minuten. 2000 Leute, so nervös war ich später nie mehr, ein gewisser juveniler Unverletzlichkeitsgedanke hat mir damals auch geholfen. → Nach den Studien, Industrie und Lehre viel es mir nicht mehr so leicht alles aus dem Bauch zu spielen, aber in 1- 2 Jahren kann ich es wieder nur ein bisschen anders komplex.

Das ist, so denke ich musikalisch bemerkenswert. Acht Metronome, die allmählich ihre Phasenbeziehungen verändern, erzeugen ein komplexes rhythmisches Geflecht. Und ich habe damals intuitiv mit etwas gearbeitet, das ich heute mathematisch untersuche und mit Max/MSP gestalten werde.

Zwei neugierige Menschen können reicher sein als eine ganze gebildete Runde. Ich möchte gerne Gedanken verkörpern. @frigal

Besonders bemerkenswert finde ich meine Beobachtung, dass mir nach dem Studium das unmittelbare Spielen aus dem Bauch schwerer fiel.

Vielleicht liegt meine Aufgabe gar nicht darin, zu dieser früheren Unbefangenheit zurück zukehren. Sondern darin, **die damalige Spontaneität mit meinem heutigen Wissen und meiner Erfahrung zu verbinden.**

Nicht weniger Bauch, sondern mehr Möglichkeiten!

Für meine Miller-Weg wünsche ich mir?

Dass ich irgendwann acht virtuelle Metronome in Max/MSP starten, ihre Phasen langsam auseinanderlaufen lassen – und ich wieder darüber improvisiere. Diesmal mit allen Möglichkeiten meiner heutigen Klangwelt.

Vom Audimax 1970-irgendwann zu Max/MSP 2026. Ein Kreis schließt sich, aber auf einer neuen Ebene.