

Zwei neugierige Menschen können reicher sein als eine ganze gebildete Runde. Ich möchte gerne Gedanken verkörpern. @frigal

Integrale lösen und Mathematik für elektronische Musik

Früher suchte man eine passende Formel in einer Integraltafel; heute kann ein Computer viele Integrale symbolisch berechnen oder ihren Wert numerisch bestimmen. Der mathematische Gedanke dahinter bleibt derselbe.

Dabei gibt es zwei unterschiedliche Ziele:

Unbestimmtes Integral: Eine Stammfunktion finden, beispielsweise

$$\int 2x \, dx = x^2 + C$$

Bestimmtes Integral: Einen Zahlenwert zwischen zwei Grenzen berechnen, beispielsweise

$$\int_0^1 2x \, dx = 1.$$

1. Früher: erkennen, umformen, nachschlagen

Nehmen wir:

$$\int \frac{2x}{1+x^2} \, dx$$

In der Integraltafel fand man die Grundform:

$$\int \frac{1}{u} \, du = \ln |u| + C$$

Die eigentliche Arbeit bestand darin, das eigene Integral auf diese Form zu bringen. **Man setzte:**

$$u = 1 + x^2, \quad du = 2x \, dx$$

Damit wurde daraus:

$$\int \frac{1}{u} \, du = \ln |u| + C = \boxed{\ln(1 + x^2) + C}$$

Die Tabelle lieferte die Formel; der Mensch musste erkennen, wie sie zur Aufgabe passt.

Dafür brauchte man etwa **Substitution, partielle Integration oder Partialbruchzerlegung**. Schwierige Integrale konnten mehrere Seiten Rechenarbeit verlangen.

Für Zahlenwerte gab es außerdem **schon früher Näherungsverfahren**, die man von Hand, mit Rechenmaschinen oder später mit Computern ausführte. Integral und Differential Rechnung für den Ingenieur!!

Numerische Mathematik gab es schon vor vielen Jahren.

Zwei neugierige Menschen können reicher sein als eine ganze gebildete Runde. Ich möchte gerne Gedanken verkörpern. @frigal

2. Heute: zwei Wege am Computer

Symbolische Berechnung: Ein Computeralgebrasystem, **kurz CAS**, erhält den Ausdruck und sucht eine exakte Stammfunktion.

Für das Beispiel liefert es:

$$\ln(1 + x^2) + C$$

Dahinter stehen mathematische Algorithmen und Regeln. Das System übernimmt häufig auch das Erkennen und Umformen.

Numerische Berechnung: Wenn man einen Zahlenwert braucht, kann der Computer das bestimmte Integral näherungsweise berechnen.

Zum Beispiel:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 0,746824$$

Hier gibt es keine Stammfunktion aus den üblichen elementaren Funktionen. Trotzdem lässt sich der Zahlenwert sehr genau berechnen. Eine symbolische Darstellung ist **mithilfe einer speziellen Funktion, der Fehlerfunktion, möglich**.

3. Beide Wege im Vergleich

Frage	Integraltafel	Heutige Software
Wer erkennt die passende Form?	Hauptsächlich der Mensch	Häufig das CAS
Wer formt den Ausdruck um?	Der Mensch	Mensch oder CAS
Was erhält man?	Eine Formel zur weiteren Anwendung	Eine symbolische Formel oder einen Zahlenwert
Wo liegen Grenzen?	Umfang der Tabelle und eigenes Können	Leistungsfähigkeit des Systems und mathematische Grenzen
Wie prüft man?	Stammfunktion ableiten	Ebenfalls ableiten; bei Zahlenwerten Genauigkeit prüfen

Für mich als Ingenieur ist die entscheidende Veränderung:

→ Die mühsame Rechenarbeit lässt sich heute weitgehend abgeben. Verstehen muss ich weiterhin, *welches Integral mein Problem beschreibt, welche Voraussetzungen gelten und ob das Ergebnis sinnvoll ist.*

Und die schönste Kontrolle bleibt ganz klassisch:

$$\frac{d}{dx} \ln(1 + x^2) = \frac{2x}{1 + x^2}$$

Damit ist die gefundene Stammfunktion überprüft – unabhängig davon, ob sie aus einer Tabelle oder vom Computer stammt.

Zwei neugierige Menschen können reicher sein als eine ganze gebildete Runde. Ich möchte gerne Gedanken verkörpern. @frigal

Solche Tafeln standen in Bibliotheken, in technischen Firmen und oft im eigenen Bücherregal eines Ingenieurs, bei mir auch. s.w.u. Mit „Tafeln“ meinte man meist Tabellen in einem gedruckten Buch.

Typische Fundorte waren:

Wo?	Wie wurden sie genutzt?
Am eigenen Arbeitsplatz	Eine persönliche Formelsammlung zum schnellen Nachschlagen
In Entwicklungsabteilungen	Gemeinsame Nachschlagewerke für Berechnungen
In Firmenbibliotheken	Größere Sammlungen mathematischer und technischer Fachliteratur
In Hochschulbibliotheken	Standardwerke zum Ausleihen oder Nachschlagen im Lesesaal

Nicht jede Firma hatte eine eigene Bibliothek. Das hing von ihrer Größe und ihren Aufgaben ab. Für den Alltag reichte häufig ein gutes mathematisches Taschenbuch.

Ein besonders bekanntes war **Bronstein/Semendjajew: „Taschenbuch der Mathematik“**, kurz **„der Bronstein“ s. Regal.**

Die deutsche Ausgabe erschien 1958 und wurde für Generationen von Ingenieuren und Naturwissenschaftlern zum Standardwerk. Darin standen neben Integralen auch viele andere mathematische Formeln und Tabellen. **Es gab außerdem eigene Bücher nur mit Integraltafeln, beispielsweise von Carl Naske schon 1935.**

Meine Erinnerung an Frankfurt und dem „Fachinformationszentrum Technik“, kurz FIZ Technik. Da musste ich Informationen holen für meine erste Diplom Arbeit.

Es wurde 1979 gegründet; zu seinen Vorgängern gehörten die **Zentralstelle der Dokumentation für Elektrotechnik (ZDE)** und die **Dokumentation Maschinenbau (DOMA).**

Dort ging es vor allem darum, **technische Fachliteratur aufzuspüren:** Aufsätze, Tagungsberichte, Forschungsberichte, Dissertationen und Bücher. Das war besonders hilfreich, wenn die vorhandenen Handbücher eine spezielle Entwicklungsfrage nicht beantworteten.

Der damalige Ablauf war also häufig: ➔erst im eigenen Handbuch nachschlagen – bei einer schwierigeren Frage die Bibliothek oder einen Fachinformationsdienst einschalten.

Das war meist mit einer bis zwei Wochen Wartezeit verbunden.

Zwei neugierige Menschen können reicher sein als eine ganze gebildete Runde. Ich möchte gerne Gedanken verkörpern. @frigal

Meine eigene Klangwelt & Mathematik

Wenn eine konkrete Klangidee in Max/MSP hat und Mathematik verwenden will oder muss, nehme ich den Bronstein dazu und schaue mir gezielt das Nötige an.

→ Die Klangidee gibt die Richtung vor – die Mathematik hilft uns, sie umzusetzen.

MATLAB und Mathcad gehören zu diesen mathematischen Werkzeugen am Computer. Sie können viel von der früheren Arbeit mit Formelsammlungen übernehmen – und darüber hinaus **Berechnungen automatisieren.**

Beide habe ich bei den Technikern und an der BA verwendet. Man kann damit auch elektronische Musik machen (s.w.u). https://www.ds.mpg.de/4048736/240205_humanizing

Werkzeug Typische Arbeitsweise

Bronstein Man sucht eine Formel und wendest sie selbst an.

MATLAB Ich schreibe Befehle oder Programme, um Berechnungen durchzuführen.

Mathcad Ich arbeite auf einem Blatt mit lesbaren Formeln, Texten und Diagrammen – ähnlich einem rechnenden Ingenieur-Notizbuch.

MATLAB bedeutet *MATrix LABoratory*. Seine Stärke liegt beim Rechnen mit Zahlen, Matrizen und Daten.

Für Integrale unterscheidet es beispielsweise:

integral: berechnet einen **numerischen Wert** zwischen Grenzen.

int aus der zusätzlichen **Symbolic Math Toolbox:** sucht eine **symbolische Lösung**, also eine Formel.

Mathcad kommt dem klassischen Berechnungsblatt besonders nahe: Ich schreibe mathematische Ausdrücke in gewohnter Darstellung und **kann mit Einheiten arbeiten.** Es bietet sowohl numerische als auch symbolische Berechnungen.

Der wesentliche Schritt gegenüber dem Bronstein ist: **Das Nachschlagewerk wird zum aktiven Rechenwerkzeug.** Ändert sich beispielsweise eine Eingangsgröße, kann die ganze Berechnung neu ausgeführt werden.

Für meine Max/MSP-Arbeit können solche Programme bei einer aufwendigen mathematischen Untersuchung helfen. **Für einfache Frequenzverhältnisse, Hüllkurven oder rhythmische Berechnungen reicht meist das, was ich direkt in Max bauen können.**

Zwei neugierige Menschen können reicher sein als eine ganze gebildete Runde. Ich möchte gerne Gedanken verkörpern. @frigal

Beispiel Matlab:

Mit MATLAB elektronische Musik machen?? Kein Problem. Obwohl MATLAB primär als Software für Mathematiker und Ingenieure bekannt ist, eignet es sich hervorragend für die Synthese von Sound, das Erstellen digitaler Instrumente und sogar für die Entwicklung eigener Audio-Effekte.

Da digitale Musik im Grunde nur aus Aneinanderreihungen von Zahlen (Audiosamples) besteht, kann man über mathematische Funktionen Beats, Synthesizer und Melodien von Grund auf selbst programmieren.

Hier ist eine Übersicht, wie man das anstellt – **vom ersten Ton bis zum fertigen VST-Plugin für echte Musikprogramme.**

1. Die absolute Basis: Einen Ton erzeugen

Ein einfacher Synthesizer-Ton ist physikalisch gesehen eine Sinuswelle. Mit folgendem Code-Beispiel aus dem [MathWorks-Forum](#) erzeugt man den Kammerton A (440 Hz) für genau eine Sekunde:

```
Fs = 44100;           % Abtastrate (Standard für CD-Qualität)
duration = 1.0;       % Dauer in Sekunden
t = 0:1/Fs:duration; % Zeitvektor

f = 440;              % Frequenz für die Note A
signal = sin(2*pi*f*t); % Die Sinuswelle berechnen

sound(signal, Fs);    % Ton über die Lautsprecher abspielen
```

2. Typische Synthesizer-Wellenformen bauen

Reine Sinustöne klingen schnell langweilig (wie ein alter Sinus-Generator). Für elektronische Musik (Techno, Synthwave, Chiptune) braucht man obertonreiche Wellenformen:

Sägezahn (Sawtooth): Klingt scharf und aggressiv (ideal für EDM-Leads und Bässe). In

MATLAB nutzbar über `sawtooth(2*pi*f*t)`.

Rechteck/Pulse (Square): Klingt hohl und retro (wie der GameBoy-Sound).

In MATLAB über `square(2*pi*f*t)`.

Wenn man diese Signale mit einer **Hüllkurve (ADSR – Attack, Decay, Sustain, Release)** multipliziert, ploppen die Töne nicht einfach plump auf, sondern klingen natürlich aus wie bei einem echten Synthesizer oder einer angeschlagenen Saite.

Weiter s.a. Physical Modelling

3. Fortgeschritten: Die Audio Toolbox

Wenn man tiefer einsteigen will, stellt MathWorks die [Audio Toolbox](#) zur Verfügung. Damit verlässt man das "reine Mathe-Skripting" und nutzt **professionelle Werkzeuge**:

Zwei neugierige Menschen können reicher sein als eine ganze gebildete Runde. Ich möchte gerne Gedanken verkörpern. @frigal

MIDI-Steuerung: Man kann ein echtes MIDI-Keyboard an seinen PC anschließen und die Tastenanschläge in Echtzeit in MATLAB verarbeiten, um Sounds zu triggern.

VST-/AU-Plugin-Generierung: Man kann in MATLAB eigene Synthesizer oder Effekte (wie Delays, Reverbs oder parametrische EQs) schreiben und diese per Knopfdruck als fertiges Plugin (generateAudioPlugin) exportieren. **Diese lädt man dann in professionelle Musikprogramme (DAWs) wie Ableton Live, FL Studio oder Logic Pro.**

Vor- und Nachteile von MATLAB in der Musikproduktion

Vorteile	Nachteile
Grenzenlose Freiheit: Man kann völlig neue Synthese-Arten erfinden, die kein kommerzieller Synthesizer bietet.	Keine visuelle Timeline: Man arrangiert Musik nicht per Drag-and-Drop, sondern programmiert Songstrukturen in Code-Schleifen.
Perfekt für Audio-Effekte: Filter und mathematische Signalmanipulationen sind MATLABs absolute Kernkompetenz.	Performance: Reine MATLAB-Skripte sind für komplexe Live-Arrangements oft zu langsam (es sei denn, sie werden kompiliert).

Theorie der elektronischen Musik:

Ein schönes Beispiel ist die **Ringmodulation**: Zwei einfache Schwingungen werden multipliziert – dabei entstehen neue Frequenzen.

M.Puckette erklärt das in *The Theory and Technique of Electronic Music*, **Abschnitt 5.2 „Multiplying Audio Signals“**. Seine Buchbeispiele verwenden Pure Data; man kann das Prinzip unmittelbar in MSP umsetzen. Die folgenden Zahlen sind mein eigenes Beispiel.

1. Die Klangidee

Ich nehme zwei reine Töne:

220 Hz: ein A.

55 Hz: ein tiefes A.

ich multipliziere ihre momentanen Signalwerte. **Das heißt:** MSP verrechnet die beiden Schwingungen **Sample für Sample**.

Dadurch entstehen zwei Frequenzen:

$$f_{\text{Differenz}} = |220 - 55| = 165 \text{ Hz}$$

$$f_{\text{Summe}} = 220 + 55 = 275 \text{ Hz}$$

Bei diesen idealen reinen Tönen enthält das Ergebnis die beiden neuen Frequenzen; die ursprünglichen 220 und 55 Hz sind darin nicht mehr enthalten.

2. Was würde der Bronstein dazu beitragen?

Die Erklärung steckt in einer trigonometrischen Formel:

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} \cos(a - b) + \frac{1}{2} \cos(a + b)$$

Das Produkt zweier Cosinusschwingungen wird zur Summe einer Differenz- und einer Summenschwingung. Genau deshalb entstehen die zwei neuen Töne. Hier brauche ich also eine trigonometrische Identität aus der Formelsammlung.

Zwei neugierige Menschen können reicher sein als eine ganze gebildete Runde. Ich möchte gerne Gedanken verkörpern. @frigal

3. Die Umsetzung in MSP

Ich erzeuge diese Objekte und verbinde sie:

Ausgang Verbindung

cycle~ 220 Linker Eingang von *~

cycle~ 55 Rechter Eingang desselben *~

***~** Eingang von *~ 0.05

***~ 0.05** Beide Eingänge von ezdac~

ezdac~ ein und höre zunächst leise.

cycle~ erzeugt standardmäßig eine Cosinusschwingung.

*~ multipliziert die Signale;

*~ 0.05 reduziert den Ausgangspegel.

Diese Multiplikation ist die grundlegende Umsetzung der Ringmodulation in MSP.

4. Mein kleines Hörexperiment

Ich lasse die **220 Hz** stehen und ändere nur den zweiten Oszillator:

Zweiter Oszillator Neue Frequenzen

55 Hz 165 und 275 Hz

100 Hz 120 und 320 Hz

137 Hz 83 und 357 Hz

Ich höre, wie sich das Verhältnis der beiden entstehenden Töne verändert.

Bei **einer komplexen Klangquelle, etwa einer Trommelaufnahme**, entstehen solche Frequenzpaare aus ihren vielen Klangbestandteilen. ➔ **Das kann metallische oder glockenartige Farben ergeben.**

Hier ergänzen sich die Werkzeuge:

Der Bronstein erklärt die Beziehung,

MATLAB oder Mathcad kann sie untersuchen und darstellen, und **MSP macht sie sofort hörbar.**

➔ **Für dieses kleine Experiment reicht MSP allein.**